



TITLE:

# Semiclassical Properties and Chaos Degree for the Quantum Baker's Map (Analytical Study of Quantum Information and Related Fields)

AUTHOR(S):

井上, 啓; 大矢, 雅則

---

CITATION:

井上, 啓 ...[et al]. Semiclassical Properties and Chaos Degree for the Quantum Baker's Map (Analytical Study of Quantum Information and Related Fields). 数理解析研究所講究録 2001, 1196: 134-148

ISSUE DATE:

2001-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/64849>

RIGHT:

## Semiclassical Properties and Chaos Degree for the Quantum Baker's Map

東理大理工 井上 啓 (Kei INOUE)

大矢雅則 (Masanori OHYA)

### 1. はじめに

カオスとは、混沌さや無秩序さを意味する言葉であり、非線形な微分方程式 (差分方程式) の解のなどの予測が困難な複雑な振る舞いとして知られている。カオスの特徴として、初期値に関する鋭敏性といった性質があるが、これは、2つの非常に近接した初期値を与えても、ある程度時間が経つと、全く異なる値を取ってしまうため、もはやその時点から最初の状態を予測できなくなるというものである。1960年頃、エドワード・N・ローレンツは、簡単な微分方程式から作られる天気予報の気象モデルが、この性質を有していることを発見した[Lor]。現在、このモデルは、ローレンツモデル (ローレンツアトラクター) と呼ばれている。カオスの研究を歴史的な順序を追って振り返ってみると、ポアンカレの研究[Poi]から始まり、1930年代のファンデアポールにより非線形電気回路におけるカオス運動の発見、コルモゴロフ、アーノルド、モーザー、チリコフなどのハミルトン力学系におけるカオスの研究[Am,Chi]へと続いていく。

カオスの数理に関する研究は、ジェームズ・ヨークがT・Y・リーとの共著で発表した論文「Period three implies chaos」[LY]が発表された頃から、盛んに行われるようになった。この論文では、カオスの存在条件にしか言及していないが、いまでは、カオスの度合いを定量化するための尺度がいくつか提案されている。例えば、リアプノフ指数は、解の軌道の指数関数的な収束や発散の度合いによりカオスの特徴付ける指標である[Ose]。この指数が0よりも大きいときは、2つの接近した軌道は時間が経つにつれて指数関数的に離れていくので、系はカオスを示している。逆に、この指数が0以下であれば、2つの接近した軌道は指数関数的に漸近して最終的には一致してしまうというため、系はカオスを示さない。また、幾何学図形のフラクタル次元[Man2]を用いれば、カオスを示す系の力学は、その値が非整数値を取る場合として位置付けることができる。なぜなら、カオスを示す力学系の軌道の集合は、ある部分を切り取っても拡大するとまた同じ様な図形があらわれることから、自己相似性を有しており、

しかも、単なる点、直線、長方形などの単純な幾何学図形ではないからである。この他にも、位相エントロピー[AKM]や力学的エントロピー[Kol1,Sin1]などのエントロピーを用いてカオスを定量化する指標もある。

こうした研究を経て、現在では、量子系のカオスをどう扱うかといった量子カオスの研究が行われるようになった。古典力学系におけるカオス的な振る舞いの主な特徴がよく知られている一方で[AA,Sin], 量子カオスの研究は、重要な発展があるものの、ほとんど明確になっていない。その理由は、初期条件に関する鋭敏性の古典的な記述を量子系に一般化しようとする量子カオスの試みが、以下の2つの理由のためにうまくいかないからである：(1) 古典系における相空間上の軌道の量子版が存在しない(2) 線形なシュレディンガー方程式のユニタリー性が量子系の状態ベクトルの初期条件に関する鋭敏性を排除する。そこで、多くの場合、量子系の状態の時間発展はユニタリーであるという仮定の下で、量子古典対応を調べるといったものが多い。例えば、カオスを示すハミルトン系を量子化して量子系におけるエネルギー(固有値)の間隔分布を調べるといった量子準位統計[Ber,BT], ハミルトニアン行列の各成分がランダムであるような場合に、ある対称性だけをハミルトニアン行列に持たせてエネルギーの間隔分布を調べるといったランダム行列理論[Met,Dys], 量子化したときのエネルギーを対応する古典軌道を用いて記述しようとするグッツビラーの跡公式[Gut1,Gut2]等である。

このようにして、カオスの研究は盛んに行われるようになったが、古典カオスの定義同士の相関や量子カオスの定義は必ずしも明確にはなっていない。そこで、古典系や量子系といった系に関係なく、系とその力学として記述される現象のカオスを取り扱う指標を導入できれば、カオスの統一的な解釈が可能となるものと考えられる。カオス尺度は情報力学の複雑さ $C$ を用いて定義されるカオスを測る量であり、系に依存せず定義されるため、カオスを統一的に取り扱うことができる[O9,O6]。今までに、カオス尺度のうち、エントロピーによって定義されるエントロピー型カオス尺度を用いて、ロジスティック写像、テント写像などのカオスを示す一次元差分方程式系のカオスが調べられている[O9,OK]。通常、差分方程式系から得られるのは、点列の時間変化である軌道のみであるが、この軌道をもとに状態(確率分布)を設定することにより、エントロピー型カオス尺度が定められる。このカオス尺度を計算した結果、カオス尺度は、リアプノフ指数の計算ができる場合においては、同様の結果を与えることが示されている。また、エントロピー型カオス尺度は、リアプノフ指数に

比べて計算アルゴリズムが容易であるばかりでなく、系の方程式がはっきりと分らない場合でも計算可能であるといった特徴も持っている。

ここでは、量子パイコね変換を通して量子カオスを扱う方法を与えるとともに、通常の（古典的）パイコね変換と量子パイコね変換の力学の対応関係をエントロピー型カオス尺度を用いて調べ、ある特定の時刻までは2つの力学のカオスの推移は同様のものであること、さらに、古典極限（ $\hbar \rightarrow 0$ ）では2つの力学が一致することが示す[IOV].

## 2. 量子力学 対 古典力学

この節では、コヒーレント状態による量子力学における半古典極限へのアプローチを説明する[Hep]. 次の節では、量子パイコね変換に対するこのアプローチの拡張を与える。ハミルトニアン関数をもった以下の正準系を考えてみる：  
 $(p, x) \in \mathbb{R}^2$ において

$$H = \frac{p^2}{2} + V(x) \quad (2.1)$$

我々は、正準方程式

$$\dot{x}(t) = p(t), \quad \dot{p}(t) = -V'(x(t)) \quad (2.2)$$

が初期値

$$x(0) = x_0, \quad p(0) = v_0 \quad (2.3)$$

に対して、時刻  $|t| < T$  では、唯一の解  $(x(t), p(t))$  を持つものと仮定する。これは初期値

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (2.4)$$

を持ったニュートン方程式

$$\ddot{x}(t) = -V'(x(t)) \quad (2.5)$$

に等しい。

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + iv_0) \quad (2.6)$$

とすると、量子ハミルトニアン作用素は

$$H_h = \frac{p_h^2}{2} + V(q_h)$$

に等しい。ただし、 $p_h$ と $q_h$ は正準交換関係

$$[p_h, q_h] = -ih$$

を満たす。正準作用素のハイゼンベルグ時間発展は

$$p_h(t) = U(t)p_hU(t)^*, \quad q_h(t) = U(t)q_hU(t)^*$$

で定義される。ここで、

$$U(t) = \exp(-itH_h / \hbar)$$

である。古典極限を考察に対しては、変数 $x \in \mathbf{R}$ の関数に作用していると見る、次の表現を用いる。

$$p_h = -i\hbar^{1/2} \frac{\partial}{\partial x}, \quad q_h = \hbar^{1/2} x$$

また、

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q_h + ip_h) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q_h - ip_h) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

とすると

$$[a, a^*] = 1.$$

コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は

$$|\alpha\rangle = W(\alpha)|0\rangle \tag{2.7}$$

で定義される。ただし、 $\alpha$ は複素数であり、 $W(\alpha) = \exp(\alpha a^* - a \alpha^*)$ 、 $|0\rangle$ は真空ベクトルで $a|0\rangle = 0$ 。真空ベクトルは

$$(q_h + ip_h)|0\rangle = 0 \tag{2.8}$$

の解である。

$x$ 表現において

$$|0\rangle = \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.9)$$

作用素  $W(\alpha)$  を

$$W(\alpha) = C e^{iq_h v_0 / h^{1/2}} e^{-ip_h x_0 / h^{1/2}} \quad (2.10)$$

ただし,  $C = \exp\left(-\frac{v_0 x_0}{2h}\right)$ .

コヒーレントベクトルに関する位置作用素の平均値は, 実数値関数

$$q(t, \alpha, h) = \langle h^{-1/2} \alpha | q_h(t) | h^{-1/2} \alpha \rangle \quad (2.11)$$

である. いま, 半古典極限を記述している次の基本形式を与える.

$$\lim_{h \rightarrow 0} q(t, \alpha, h) = x(t, \alpha) \quad (2.12)$$

ここで,  $x(t, \alpha)$  は初期値(2.4)式を持った(2.5)式の解であり  $\alpha$  は(2.6)式によって与えられる.

時刻  $t=0$  に対して, 量子期待値  $q(t, \alpha, h)$  が古典の値に等しいことを明記しておく: 任意の  $h$  に対して

$$q(0, \alpha, h) = x(0, \alpha) = x_0 \quad (2.13)$$

我々は, 2つの実数値関数  $q(t, \alpha, h)$  と  $x(t, \alpha)$  の時間依存性を比較するつもりである. 小さな時刻  $t$  に対して, これらの関数は近似的に等しい. 重要な問題は, それらの間に大きな違いが現れる時刻  $t$  を予測することにある. ある量子期待値と古典の値が  $h$  の逆数に比例する時間スケールで収束することが期待される. 他の著者等は, ずっと小さな対数的な時間スケールでその対応関係が壊れると提案している[OS,SV,LO,SC1,SC2,OT].

### 3. 量子パイこね変換のコヒーレント状態

古典パイこね変換は  $[0,1] \times [0,1]$  から  $[0,1] \times [0,1]$  への写像として, 以下で定義される.

$$(q, p) \rightarrow \begin{cases} \left(2q, \frac{p}{2}\right) & \left(0 \leq q \leq \frac{1}{2}\right) \\ \left(2q-1, \frac{p+1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2} \leq q < 1\right) \end{cases}$$

この写像は、単位平面を保存しながら、 $p$ 方向における単位平面を引き延ばして、 $[0,1]$ 区間から飛び出た部分を $q$ 方向に折り畳むという操作であるが、次のように単位平面における左側半分を下半分、右側半分を上半分に変換する写像とも言える。

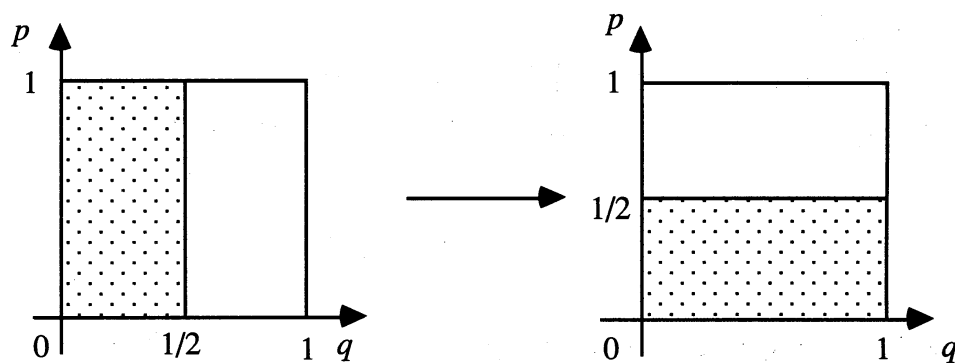


図.3.1. パイこね変換

単位平面を量子化するために、運動量と位置方向における場所をそれぞれに生成するユニタリーな場所変換作用素 $\hat{U}, \hat{V}$ を $D$ 次元ヒルベルト空間上で定義する。それは次の正準交換関係を満たす。

$$\hat{U}\hat{V} = \varepsilon\hat{V}\hat{U}$$

ここで、 $\varepsilon = \exp(2\pi i / D)$ である。 $D = 2^N$ とする。プランク定数 $h = 1/D = 2^{-N}$ 。作用素 $\hat{U}$ と $\hat{V}$ は

$$\hat{U} = e^{2\pi i \hat{q}}, \quad \hat{V} = e^{2\pi i \hat{p}}$$

で表される。

位置作用素 $\hat{q}$ と運動量作用素 $\hat{p}$ はともに固有値 $j/D, j=1, \dots, D-1$ を持つ。もし、 $\{|q_j\rangle\}$ が位置作用素 $\hat{q}$ の固有ベクトルならば、運動量作用素 $\hat{p}$ の固有ベクトル $\{|p_j\rangle\}$ は離散フーリエ変換 $F_N$ を用いて以下で得られる：

$$|p_j\rangle = F_N |q_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{k=0}^{D-1} e^{2\pi i k j / D} |q_k\rangle$$

量子パイこね変換は、次の行列として書かれる：

$$T = F_N^{-1} \begin{pmatrix} F_{N-1} & \\ & F_{N-1} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

我々はコヒーレント状態を

$$|\alpha\rangle = C e^{2\pi i \hat{q} v} e^{-2\pi i \hat{p} x} |\psi_0\rangle \quad (3.2)$$

によって定義する。

ここで、 $\alpha = x + iv$ 、 $x$ と $v$ は整数、 $C$ は正規化定数、 $|\psi_0\rangle$ は真空ベクトルである。この定義は(2.10)式と比較されるべきである。真空ベクトルは

$$(q_h + ip_h)|\psi_0\rangle = 0$$

の解として与えられる ((2.8)式と比較せよ)。我々は位置表現においてより簡単な表現である

$$\langle q_j | \psi_0 \rangle = C \exp(-q_j^2 / 2)$$

を用いる ((2.9)式と比較せよ)。ここで、 $C$ は正規化定数である。

#### 4. 量子パイこね変換のカオス尺度

この節では、量子パイこね変換によって構成される時間発展に対する位置作用素 $\hat{q}$ の平均値の一般的な表現を示す。次に、量子パイこね変換のカオス尺度の計算アルゴリズムを与える。

前節で、量子パイこね変換の定義を与えたが、この量子パイこね変換の全体のクラスが定義されている[SC3]。それは、古典パイこね変換の記号力学[AY]の量子版である：任意の $n, 1 \leq n \leq N-2$ に量子パイこね変換 $T_n$ は

$$T_n |\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n \xi_{n+1} \xi_{n+2} \cdots \xi_N\rangle = |\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{n+1} \xi_{n+2} \xi_{n+3} \cdots \xi_N\rangle \quad (4.1)$$

で与えられる[SC3]。ただし、 $n, 1 \leq n \leq N-1$ に対して



$$\begin{aligned}
|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n \xi_{n+1} \xi_{n+2} \cdots \xi_N\rangle &\equiv |\xi_{n+1}\rangle \otimes \cdots \otimes |\xi_N\rangle e^{i\pi(0.\xi_n \xi_{n-1} \cdots \xi_1 1)} \otimes \\
&\quad \sqrt{1/2} \{ |0\rangle + \exp[2\pi i(0.\xi_1 1)] |1\rangle \} \otimes \\
&\quad \sqrt{1/2} \{ |0\rangle + \exp[2\pi i(0.\xi_2 \xi_1 1)] |1\rangle \} \otimes \cdots \otimes \\
&\quad \sqrt{1/2} \{ |0\rangle + \exp[2\pi i(0.\xi_n \cdots \xi_1 1)] |1\rangle \}
\end{aligned}$$

$n = N-1$ のとき、この変換 $T_n$ は、(3.1)式の $T$ に一致し、次のようになる：

$$T_{N-1} |\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{N-1} \xi_N\rangle = T |\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{N-1} \xi_N\rangle = |\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_N\rangle \quad (4.2)$$

また、 $n=0$ のとき、この変換 $T_n$ は

$$T_0 |\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_N\rangle = |\xi_1 \xi_2 \xi_3 \cdots \xi_N\rangle \quad (4.3)$$

となる。

量子パイこね変換 $T_0$ の時間発展と $N \rightarrow \infty$ に対応する古典極限 $\hbar \rightarrow 0$ を調べるために、次のようなある一つの基底 $|\xi\rangle$ に関する時刻 $n$ での位置作用素 $\hat{q}$ の平均値を導入する：

$$r_N^{(n)} = \langle \xi | T_0^n \hat{q} T_0^{-n} | \xi \rangle \quad (4.4)$$

ここで、 $|\xi\rangle = |\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_N\rangle$ 、 $\hat{q} = \sum_{j=0}^{2^N-1} q_j |j\rangle \langle j|$ 、 $q_j = \frac{j+1/2}{2^N}$ 、 $j = 0, 1, \dots, 2^N-1$ 、

$j = \sum_{k=1}^N j_k 2^{N-k}$ 、 $j_k = 0, 1$ である。

2つの異なる基底に関する $T_0$ の行列要素の単純な形式が以下で与えられている[SS]：

$$\langle \xi^0 | T_0 | \xi^1 \rangle = \frac{1-i}{2} \prod_{k=2}^N \delta(\xi_k^0 - \xi_{k-1}^1) \exp\left(\frac{\pi}{2} i |\xi_1^0 - \xi_N^1|\right),$$

ここで、 $|\xi^0\rangle = |\xi_1^0 \xi_2^0 \cdots \xi_N^0\rangle$ 、 $|\xi^1\rangle = |\xi_1^1 \xi_2^1 \cdots \xi_N^1\rangle$ 。

(4.4)式から、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_0^n$ の行列要素が、次式で与えられることが容易に示される。

$$\langle \xi^0 | T_0 | \xi^1 \rangle = \begin{cases} \left( \frac{1-i}{2} \right)^n \left( \prod_{k=1}^{N-n} \delta(\xi_{n+k}^0 - \xi_k^1) \right) \left( \prod_{l=1}^n A_{\xi_l^0 \xi_{N-n+l}^1} \right) & (n < N) \\ \left( \frac{1-i}{2} \right)^n \left( \prod_{k=1}^n A_{\xi_k^0 \xi_k^1} \right) & (n = N) \\ \left( \frac{1-i}{2} \right)^n \left( \prod_{k=1}^p (A^{m+1})_{\xi_k^0 \xi_{N-p+k}^1} \right) \left( \prod_{l=1}^{N-p} (A^m)_{\xi_{p+l}^0 \xi_l^1} \right) & (n = mN + p) \\ \left( \frac{1-i}{2} \right)^n \prod_{k=1}^N (A^m)_{\xi_k^0 \xi_k^1} & (n = mN) \end{cases}, \quad (4.5)$$

ただし,  $|\xi^0\rangle = |\xi_1^0 \xi_2^0 \cdots \xi_N^0\rangle$ ,  $|\xi^1\rangle = |\xi_1^1 \xi_2^1 \cdots \xi_N^1\rangle$ ,  $A$  は  $2 \times 2$  行列で行列要素が

$$A_{x_1 x_2} = \exp\left(\frac{\pi}{2} i |x_1 - x_2|\right), \quad x_1, x_2 = 0, 1, \quad p = 1, \dots, N-1, \quad m \in \mathbf{N}.$$

これらの形式を使うと, 最終的に以下の2つの定理が得られる[IOV].

[定理 4. 1]

$n = mN + p, p = 1, \dots, N-1, m \in \mathbf{N}$  に対して

$$r_N^{(n)} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N-p} \xi_{p+k} 2^{-k} + \frac{2^p}{2^{N+1}} & (m = 0 \pmod{4}) \\ \sum_{k=N-p+1}^N \eta_{k-(N-p)} 2^{-k} + \frac{2^N - 2^p + 1}{2^{N+1}} & (m = 1 \pmod{4}) \\ \sum_{k=1}^{N-p} \eta_{p+k} 2^{-k} + \frac{2^p}{2^{N+1}} & (m = 2 \pmod{4}) \\ \sum_{k=N-p+1}^N \xi_{k-(N-p)} 2^{-k} + \frac{2^N - 2^p + 1}{2^{N+1}} & (m = 3 \pmod{4}) \end{cases} \quad (4.6)$$

ただし,  $\eta_k = \xi_k + 1 \pmod{2}, k = 1, \dots, N$ .

[定理 4. 2]

$n = mN, m \in \mathbf{N}$  に対して

$$r_N^{(n)} = \begin{cases} \sum_{k=1}^N \xi_k 2^{-k} + \frac{1}{2^{N+1}} & (m = 0 \pmod{4}) \\ \frac{1}{2} & (m = 1, 3 \pmod{4}) \\ \sum_{k=1}^N \eta_k 2^{-k} + \frac{1}{2^{N+1}} & (m = 2 \pmod{4}) \end{cases} \quad (4.7)$$

ただし,  $\eta_k = \xi_k + 1 \pmod{2}, k = 1, \dots, N$ .

(4.6)式, (4.7)式を用いると, 量子パイこね変換によって構成される時間発展において, 位置作用素  $\hat{q}$  の平均値  $r_N^{(n)}$  の軌道の時刻  $n$  での確率分布  $(p_i^{(n)})$  は

$$p_i^{(n)} \equiv \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{m+n} 1_{B_i}(r_N^{(k)})$$

で与えられる. ここで,  $I=[0,1]=\bigcup_i B_i$ ,  $1_{B_i}$  は定義関数:

$$1_{B_i}(x) = \begin{cases} 1 & (x \in B_i) \\ 0 & (x \notin B_i) \end{cases}$$

である. このとき, 時刻  $n$  と時刻  $n+1$  の同時確率分布は

$$p_{ji}^{(n)} \equiv \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{m+n} 1_{B_i}(r_N^{(k)}) 1_{B_j}(r_N^{(k+1)})$$

で与えられる. このとき, 時刻  $n$  でのチャネル  $\Lambda_n^*$  は

$$\Lambda_n^* \equiv \left( \frac{p_{ij}^{(n,n+1)}}{p_i^{(n)}} \right) \Rightarrow p^{(n+1)} = \Lambda_n^* p^{(n)}$$

このようにして, 量子パイこね変換のカオス尺度は

$$D_{\text{quantum baker}}(p^{(n)}; \Lambda_n^*) = \sum_i p_i^{(n)} S(\Lambda_n^* \delta_i) = \sum_{i,j} p_{ij}^{(n,n+1)} \log \frac{p_i^{(n)}}{p_{ij}^{(n,n+1)}} \quad (4.8)$$

で計算される.

## 5. 量子パイこね変換のカオス尺度の計算シミュレーションと量子古典対応

この節では, 量子パイこね変換における位置作用素  $\hat{q}$  の平均値  $r_N^{(n)}$  の力学と古典パイこね変換における  $q$  方向の値  $q^{(n)}$  の力学を比較する. この平均値の初期値  $r_N^{(0)}$  として,

$$r_N^{(0)} = \sum_{l=1}^N \xi_l 2^{-l} + \frac{1}{2^{N+1}} = 0.\xi_1 \cdots \xi_N 1$$

と取る. ここで,  $\xi_i, i=1,2,\dots,N$  は 0 または 1 の値を取る疑似乱数である. 時刻

0において、古典パイこね変換における $q$ 方向の値 $q^{(0)}$ はこの $r_N^{(0)}$ の値と等しいと仮定する．このとき、 $N=500$ の場合における $r_N^{(n)}$ の分布が時刻 $n=1000$ までに関して図5.1に示されている．同様に、 $N=500$ の場合における $q^{(n)}$ の分布が時刻 $n=1000$ までに関して図5.2に示されている．

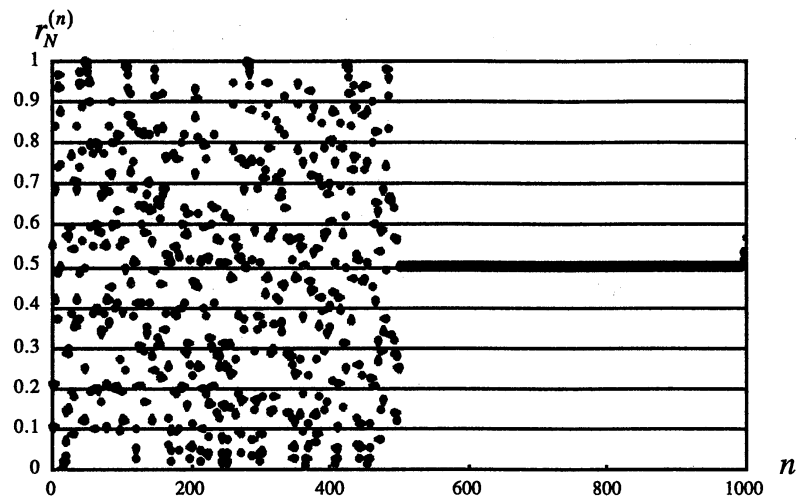


図5.1.  $r_N^{(n)}$ の分布( $N=500$ )

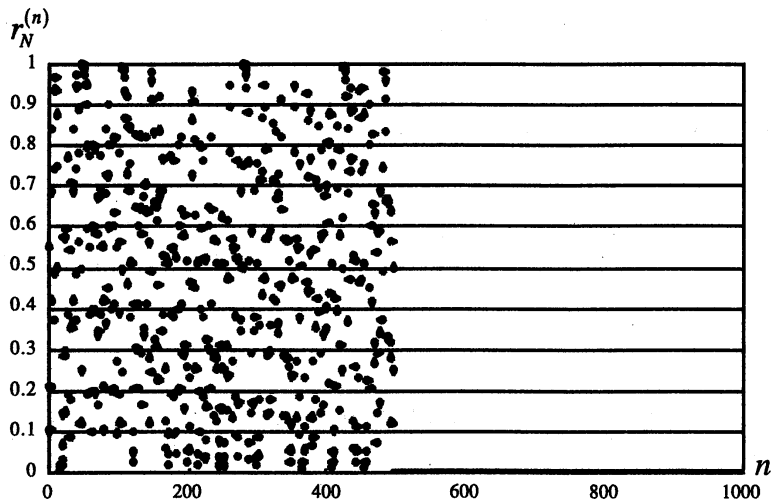


図5.2.  $q^{(n)}$ の分布( $N=500$ )

図5.3は $N=500$ の場合の量子パイこね変換と古典パイこね変換のカオス尺度の時刻 $n=1000$ までの変化を表している．

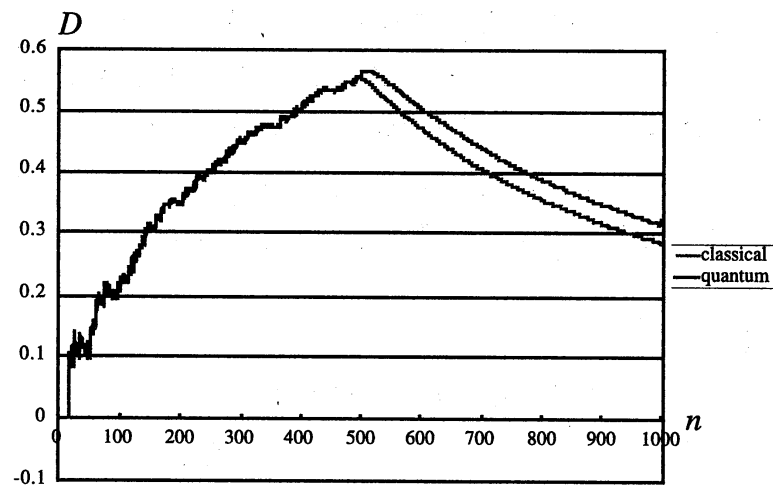


図.5.3. 古典及び量子パイこね変換のカオス尺度の変化  
( $N = 500$ )

図.5.3を見ると、量子パイこね変換のカオス尺度  $D_{\text{quantum baker}}$  と古典パイこね変換のカオス尺度  $D_{\text{classical baker}}$  の対応関係が時刻  $n = 500$  まであり、それ以降、その対応関係が消滅することがわかる。一般に、任意の  $N$  に関してカオス尺度を計算すると、量子と古典のパイこね変換の間には時刻が  $T = \log_2 \frac{1}{h} = \log_2 2^N = N$  までは、対応関係があるが、時刻が対数的な時間スケール  $T$  を超えるとその対応関係が消滅することがわかった。

図.5.4には、ある固定された時刻  $n$  (ここでは、1000) において、量子パイこね変換のカオス尺度  $D_{\text{quantum baker}}$  と古典パイこね変換のカオス尺度  $D_{\text{classical baker}}$  の差の  $N$  に関する変化が示されている。

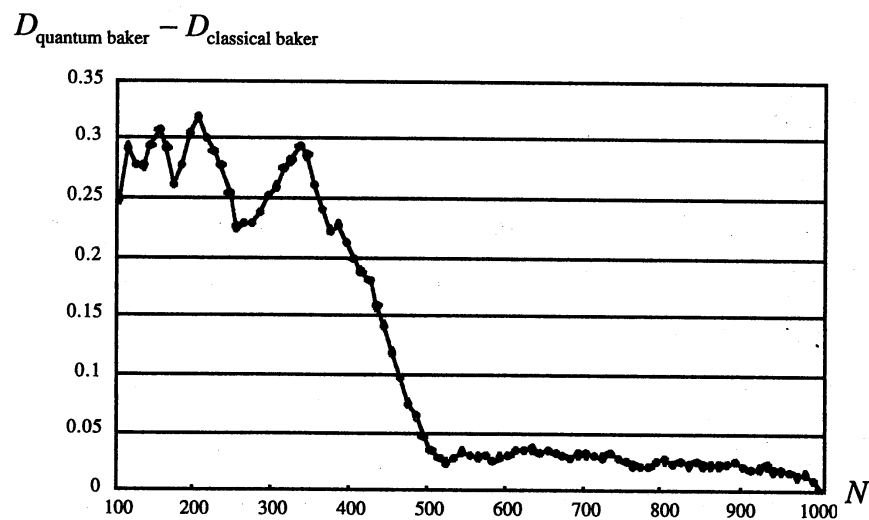


図.5.4. 量子パイこね変換のカオス尺度と古典パイこね変換のカオス尺度の差の変化 ( $n = 1000$ )

図5.4を見ると、 $N \rightarrow \infty$ とするにつれて、量子及び古典のカオス尺度の値の差が小さくなっていくことがわかる。一般に、固定されている時刻  $n$  を変化させても同様のことが示せる。このことから、量子パイコね変換における位置作用素  $\hat{q}$  の平均値  $r_N^{(n)}$  の力学は古典極限  $N \rightarrow \infty$  ( $\hbar \rightarrow 0$ ) において、古典パイコね変換における  $q$  方向の値  $q^{(n)}$  の力学に一致することが示せた。

## 6. むすび

本稿では、エントロピー型カオス尺度を用いた量子カオスの新しい取り扱いについて述べてきた。その一つの方法として、量子系における位置作用素や運動量作用素の期待値の力学をエントロピー型カオス尺度を用いて調べ、2つの力学の対応関係を調べた。これらを考察した結果、具体的には、以下のような成果が得られており、エントロピー型カオス尺度をベースに量子カオスを新しい記述を与えることができた。

(1) 量子パイコね変換における位置作用素  $\hat{q}$  の平均値  $r_N^{(n)}$  の力学と古典パイコね変換における  $q$  方向の値  $q^{(n)}$  の力学において、時刻が  $T = \log_2 \frac{1}{\hbar} = \log_2 2^N = N$  ( $\hbar$  はプランク定数) までは、2つの力学のカオス的推移は同様のものであることがわかった。

(2) 量子パイコね変換における位置作用素  $\hat{q}$  の平均値  $r_N^{(n)}$  の力学は古典極限  $N \rightarrow \infty$  ( $\hbar \rightarrow 0$ ) において、古典パイコね変換における  $q$  方向の値  $q^{(n)}$  の力学と一致することがわかった。

## 7. 参考文献

- [AA] D.V.Anosov and V.I.Arnold (eds.), Dynamical Systems, VINITI, Moscow, 1996.
- [AKM] R.L.Adler, A.G.Konheim and M.H.McAndrew, Topological entropy, Trans. amer. Math. Soc. 114 (1965) 309-319.
- [Arn] V.I.Arnold, Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, Russian Math. Surveys, 18 (1963) 85.
- [AY] V.M.Alekseev and M.N.Yakobson, Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic systems, Phys. Reports, 75 (1981) 287-325.

- [Ber] M.V.Berry, Some quantum-to-classical asymptotics, Les Houches Summer School "chaos and quantum physics", Edits. Giannoni, M.J. Voros, A. and Justi, Zinn, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [Chi] B.V.Chirikov, A universal instability of many-dimensional oscillator systems, Phys. Rep. 52 (1979) 263-379.
- [BT] M.V.Berry and M.Tabor, Level clustering in the regular spectrum, Proc. R. Soc. London, A356 (1977) 375-394.
- [Dys] F.J.Dyson, A class of matrix ensemble, J.Math..Phys. 13 (1972) 90-97.
- [Gut1] M.C.Gutzwiller, Chaos in Classical and Quantum Mechanics, Springer-Verlag, 1990.
- [Gut2] M.C.Gutzwiller, Chaos with few degrees of freedom, Prog. Theor. Phys. Suppl., 116(1994) 1-16.
- [Hep] K.Hepp, The classical limit for quantum mechanical correlation function, Commun. Math. Phys., 35 (1974) 265-277.
- [IOV] K.Inoue, M.Ohya and I.V.Volovich, Semiclassical properties and chaos degree for the quantum baker's map, SUT preprint.
- [Kol1] A.N.Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 119 (1963) 861.
- [LO] M.G.E. da Luz and A.M.Ozorio de Almeida, Path integral for the quantum baker's map, Nonlinearity, 8 (1995) 43-64.
- [Lor] E.N.Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, J. Atmos. Sci., 20 (1963) 130-141.
- [LY] T.Y.Li and J.Yorke, Period three implies chaos, Amer. Math. Mon. 82 (1975) 985-992.
- [Man2] B.B.Mandelbrot, The Fractal geometry of nature, W.H.Freemann and company, San Francisco, 1982.
- [Met] M.L.Mehta, Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels, Academic Press, 1967.
- [O9] M.Ohya, Complexities and their applications to characterization of chaos, International Journal of Theoretical Physics, 37, No.1 (1998) 495-505.
- [O6] M.Ohya, State change, complexity and fractal in quantum systems, Quantum Communications and Measurement, Plenum, 2 (1995) 309-320.
- [OK] 大矢雅則, 小坂 稔, 情報力学によるカオス現象の考察, IEICE, J80-A, No.12 (1997) 2138-2144 .
- [Ose] V.I.Oseledec, A multiplicative ergodic theorem. Liapunov characteristic number

- for dynamical systems, Trans. Moscow Math. Soc. 19 (1968) 197-231.
- [OS] A.M.Ozorio de Almeida and M.Saraceno, Periodic orbit theory for the quantized baker's map, Ann. Phys., 210 (1991) 1-15.
- [OT] P.W.O'Connor and S.Tomsovic, The usual nature of the quantum baker's transformation, Ann. Phys., 207 (1991) 218-264.
- [Poi] H.Poincare (吉田洋一 訳) , 科学と方法, 岩波書店 , 1927.
- [SC1] R.Schack and C.M.Caves, Hypersensitivity to perturbations in the quantum baker's map, Phys. Rev. Lett., 71 (1993) 525-528.
- [SC2] R.Schack and C.M.Caves, Information-theoretic characterization of quantum chaos, Phys. Rev. E, 53 (1996) 3257-3270.
- [SC3] R.Schack and C.M.Caves, Shifts on a finite qubit string: A class of quantum baker's maps, Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, AAECC 10 (2000) 305-310.
- [Sin1] J.G.Sinai, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 124 (1959) 768.
- [Sin2] Ya.G.Sinai, Introduction to Ergodic Theory, Fasis, Moscow, 1996.
- [SS] A. N. Soklakov and R. Schack, Classical limit in terms of symbolic dynamics for the quantum baker's map, e-print qunatu-ph/9908040.
- [SV] M.Saraceno and A.Voros, Towards a semiclassical theory of the quantum baker's map, Physca D, 79 (1994) 206-268.